Arbeitsmappe für ____________________

Skript und Übungsaufgaben zu den

Ebenengleichungen

von

Georg Sahliger

Mainz, den 5.2.2020

Auftrag:

1. Arbeitet bitte die Beispielaufgaben durch.

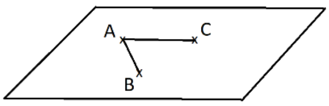
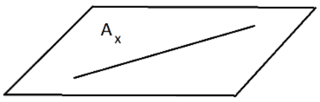
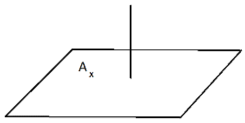
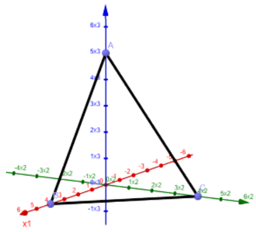
2. Rechnet die Übungsaufgaben auf der letzten Seite und gebt diese in der ersten Stunde nach den Winterferien ab.

Inhaltsverzeichnis

Wiederholung der Ebenengleichungen

Darstellung einer Ebene

Eine Ebene ist eindeutig bestimmt, durch

Drei Punkte	Ein Punkt und eine Gerade	Stützvektor und Normalenvektor	Durch die Berührpunkte mit den Achsen (Spurpunkte)
			
Parameterform		Normalenform	Koordinatenform
Gegeben: A(2,3,4) , B(3,5,2), C(4,0,1). Wie lautet die Gleichung?	Gegeben: A(2,3,4) und $9: \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ Wie lautet die Gleichung?	Gegeben: $\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und A(3,4,6)	Gegeben sind die Spurpunkte bei $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ und $x_3 = 6$. Daraus muss man eine Gleichung „basteln."
$E: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$		$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$	$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$

Wie bei den Geradengleichungen gilt: Eine Ebene besteht aus unendlich vielen Punkten, die alle die obenstehenden Gleichungen erfüllen.

Erklärungen:

Zu 1: $E: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5-3 \\ 2-4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-3 \\ 1-4 \end{pmatrix}$

$$E: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Zu 2: Gleiche Rechnung wie bei 1. A als Stützvektor nehmen. 2. Den Verbindungsvektor von A und Stützvektor der Geraden bilden. 3. Den Richtungsvektor der Geraden übernehmen

Überblick

Parameterform

$$E: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1 2 5 6

4

3

$$\left[\bar{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \qquad\qquad 2x + 3y + 5z = 33$$

Normalenform Koordinatenform

Beispiel 1: Von der Parameterform in die Normalenform

Parameterform: E: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ => Normalenform: $\left[\bar{x} - \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = 0$

Um die Normalenform zu bilden, braucht man einen Stützvektor und einen Normalenvektor.

Den Stützvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ kann man direkt übernehmen.

Nun braucht man noch einen Normalenvektor. Dieser muss orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren sein. Das bedeutet, dass das Skalarprodukt des Normalenvektors zu den beiden Richtungsvektoren jeweils 0 sein muss.

Ansatz: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$

Mit dem Skalarprodukt ergeben sich zwei Gleichungen mit drei Variablen und damit ein unterbestimmtes Gleichungssystem:

I $\quad 3n_1 - 2n_2 + 0\,n_3 = 0$

II $\quad 0n_1 + 5n_2 - 3n_3 = 0$

I $\quad 3n_1 - 2n_2 = 0 \qquad | \cdot 5$

II $\quad 5n_2 - 3n_3 = 0 \qquad | \cdot 2$

I $\quad 15n_1 - 10n_2 = 0$

II $\quad +10n_2 - 6n_3 = 0$

I + II $\quad 15n_1 - 6n_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 15n_1 = 6n_3 \quad \Rightarrow 5n_1 = 2n_3 \quad n_1 = \frac{2}{5} n_3$

Um „glatte“ Werte zu erhalten, setze für $n_3 = 5 \Rightarrow n_1 = 2$.

Nun kann man $n_1 = 2$ in I einsetzen: $3 \cdot 2 - 2n_2 = 0 \Rightarrow -2n_2 = -6$ und $\Rightarrow n_2 = 3$

Der Vektor, der zu beiden orthogonal ist, lautet: $\bar{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Diesen Vektor in die Normalenform eingesetzt, ergibt: $\left[\bar{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

Alternativ kann man den Normalenvektor auch mit dem Vektorprodukt, bzw. Kreuzprodukt ausrechen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-3) - 0 \cdot 5 \\ -(3 \cdot (-3) - 0 \cdot 0) \\ 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2: Von der Normalenform in die Parameterform

$$\left[\bar{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{E: } \bar{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Zunächst können wir wieder den Stützvektor der Normalenform für die Parameterform verwenden.

E: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Nun brauchen wir zwei Richtungsvektoren. Diese müssen folgende Bedingungen erfüllen:

1. orthogonal zum Normalenvektor sein und
2. unterschiedliche Richtung haben, bzw. kollinear sein.

1. Zwei orthogonale Vektoren suchen $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \;\; => \;\; 2x + 3y + 5z = 0$

   Durch Ausprobieren findet man recht schnell drei Zahlen, die diese Gleichungen erfüllen, insbesondere wenn man einen Wert gleich 0 setzt. Daher ist der Vektor

   $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ orthogonal. Ebenso der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Also einfach einen Wert gleich 0 setzen, die anderen beiden vertauschen und ein Vorzeichen ändern.

2. Nun muss man prüfen, ob die Vektoren auch in unterschiedliche Richtungen zeigen.

   Prüfen, ob die Gleichung lösbar ist: $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Wenn man für r unter-schiedliche Werte einsetzen muss oder wenn eine Zeile nicht lösbar ist, dann ist die Gleichung nicht lösbar und die Vektoren haben unterschiedliche Richtung.

Da wir einmal den ersten und einmal den zweiten Eintrag gleich 0 gesetzt haben, muss man dies nicht prüfen. Die Vektoren können nur kollinear sein.

Somit haben wir die Parameterform schon gefunden:

E: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Beispiel 3: Von der Normalenform in die Koordinatenform

$\left[\bar{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$ ___ x + ___ y + ___z = ___

Diese Form erhält man durch Ausmultiplizieren:

$\left[\bar{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$ $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = 0$

$[2x + 3y + 5z - (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 5)] = 0$

$2x + 3y + 5z - (2 + 6 + 25) = 0$

$2x + 3y + 5z - 33 = 0$

$2x + 3y + 5z = 33$

Beispiel 4: Von der Koordinatenform in die Normalenform

$2x + 3y + 5z = 33$ $\left[\bar{x} - \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = 0$

Den Normalenvektor kann man direkt, ablesen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Warum dies so ist, sieht man am besten, wenn man sich noch einmal Beispiel 3 anschaut.

Also $\left[\bar{x} - \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

Um einen Stützvektor zu erhalten, sucht man einen Punkt, der die Gleichung

$2x + 3y + 5z = 33$ erfüllt.

Klar, es gibt unendlich viele Punkte, also machen wir es uns so einfach wie möglich:

Setzen wir für z = 0 und für y = 1, dann bleibt 2x + 3 = 33 und 2x = 30 und x = 15

Also haben wir einen möglichen Stützvektor gefunden: $\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit ergibt sich folgende Normalenform: $\left[\bar{x} - \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

Diese Ebenendarstellung sieht anders aus als oben. Aber es handelt sich um die gleiche Ebene nur mit unterschiedlichem Stützvektor.

Beispiel 5 Von der Parameterform in die Koordinatenform

E: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ in 13x +29y-23z = -67

I x = 1 + 3r +7s

II y = 2 + 5r +4s Nun r und s eliminieren.

III z = 6 + 8r +9s

IV : I und II

5x = 5 + 15r + 35s

3y = 6 + 15r + 12s ➔ 15r = 3y -6-12s

IV: II in I 5x = -1 + 3y +23s

V : II und III

II $y = 2 + 5r + 4s$ ➔ $8y = 16 + 40r + 32s$

III $z = 6 + 8r + 9s$ ➔ $5z = 30 + 40r + 45s$ ➔ $40r = 5z - 30 - 45s$

V: II in III: $8y = 16 + 5z - 30 - 45s + 32s$ ➔ $8y = -14 + 5z - 13s$

Aus den beiden Gleichungen noch s eliminieren.

IV $5x = -1 + 3y + 23s \mid \cdot 13$ ➔ $65x = -13 + 39y + 299s$ ➔ $299s = 65x + 13 - 39y$

V $8y = -14 + 5z - 13s \mid \cdot 23$ ➔ $184y = -322 + 115z - 299s$ ➔ $-184y = 322 - 115z + 299s$

Einsetzen: $-184y = 322 - 115z + 65x + 13 - 39y$

$65x + 145y - 115z = -335 \mid :5$

$13x + 29y - 23z = -67$

Anmerkung: Je nach Rechenaufwand empfiehlt es sich die Parameterform in die Normalenform und dann in die Koordinatenform umzuwandeln.

Beispiel 6: Von der Koordinatenform in die Parameterform

Koordinatenform $13x + 29y – 23z = -67$

Setze:

$x = r$ umgeschrieben I $0 + r \cdot 1 + s \cdot 0$

$y = s$ umgeschrieben II $0 + r \cdot 0 + s \cdot 1$

Versuche nun die Koordinatengleichung nach z aufzulösen:

III. $13x + 29y – 23z = -67 \quad |-13x \mid -29y$

-23z = -13x -29y -67 | · (-1)

23z = 13x + 29y + 67 | : 23

$$z=\frac{13}{23}x+\frac{29}{23}y+\frac{67}{23}$$

Die drei Gleichungen werden folgendermaßen aufgeschrieben:

$$\text{E: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +r\cdot 1 & +s\cdot 0 \\ 0 & +r\cdot 0 & +s\cdot 1 \\ \frac{67}{23} & +r\cdot\frac{13}{23} & +s\cdot\frac{29}{23} \end{pmatrix}$$

$$\text{E: } \bar{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{67}{23} \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{13}{23} \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{29}{23} \end{pmatrix}$$ Die Ebene sieht natürlich nicht mehr aus wie die Ebene oben.

Dass es sich wirklich um die gleiche Ebene handelt, überprüfe jeder selbst, indem er die Ebenen gleichsetzt.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Wandle in die Normalenform um: E: $\bar{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Wandle in die Parameterform um: E: $\left[\bar{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} = 0$

Aufgabe 3: Wandle in die Koordinatenform um: E: $\left[\bar{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}13\\29\\-23\end{pmatrix} = 0$

Aufgabe 4: Wandle in die Normalenform um: E = 2x + 3y -z = 6

Aufgabe 5: Wandle in die Koordinatengleichung um. E: $\bar{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Aufgabe 6: Wandle in die Parametergleichung um. 2x + y -z = 3